DOI: 10.13245/j.hust.1996.08.003
第 24卷 第 8期　　华 中 理 工 大 学 学 报　　Vol. 24 No. 8
1996年 8月　　J. Huazhong Univ. of Sci. & Tech.　　Aug. 1996

分数布朗运动的功率谱分析*

薛东辉　朱耀庭　朱光喜　　熊　艳

(电子与信息工程系)　　(图像识别与人工智能研究所)

摘　要　讨论了分数布朗运动功率谱的时频分析和时间尺度域分析方法,通过对分数布朗运动非平稳性的分析,证明了非平稳的分数布朗运动通过带通滤波器的输出为一平稳随机过程的结论,从而提出了一种基于线性时不变系统滤波的分数布朗运动功率谱的频域分析方法,并且对频域分析方法进行了讨论.

关键词　分数布朗运动;分形;功率谱分析;时频分析;小波变换

分类号　O 18

1 问题的讨论

在信号处理领域中,广泛存在着一类具有长时相关性的信号,若对它们的功率谱进行测量,则在较宽的频率范围内往往得到具有如下形式的功率谱表示

$$S_x(k) \sim W_x^2/|k|^{2H+1}, \tag{1}$$

即它们的功率谱与频率成负幂指数关系.这类信号的一个重要特性就是具有统计自相似性,即它们的有限维联合概率分布与尺度变化无关.对于任意的 $a>0$, $X(t)$ 为具有统计自相似性的随机过程,则有 $X(t)\overset{P}{=}a^{-H}X(at)$,其中 $\overset{P}{=}$ 表示有限维联合概率分布相等, H 称为相似性参数.由于对于平稳随机过程,不可能具有形如式 (1) 的功率谱.因此,具有式 (1) 形式功率谱的过程必为一个非平稳随机过程.

分数布朗运动是描述具有统计自相似性随机过程的一个模型[1].分数布朗运动的定义如下.

定义 1　设 H 满足 $0<H<1$, b_0为任意实数.若随机函数满足:

$$B_H(0, k) = b_0;$$

$$B_H(t, k) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)}\cdot \left\{\int_{-\infty}^{0}[(t-s)^{H-1/2}-(-s)^{H-1/2}]\mathrm{d}B(s, k)+\int_{0}^{t}(t-s)^{H-1/2}\mathrm{d}B(s, k)\right\},$$

则称 $B_H(t, k)$ 为分数布朗运动 (fBm), H 为分形参数; b_0为初始值; k 属于样本空间 K. $H=1/2$ 时为通常的布朗运动. $B_H(t, k)$ 简记为 $B_H(t)$, 并且 $B_H(t)$ 满足零均值高斯分布.其相关函数为

$$E[B_H(t)B_H(s)] = (V_H/2)[|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H}], \tag{2}$$

式中

$$V_H = E|B_H(t+1)-B_H(t)|^2 = \Gamma(1-2H)\cos(\pi H)/(\pi H).$$

由式 (2) 知,分数布朗运动是一个非平稳过程.对于非平稳过程,其功率谱没有一个明确的定义.因此,对于分数布朗运动的功率谱,无法用通常的方法求得. Flandrin 从测度的意义上给出了分数布朗运动功率谱的时频分析与时间尺度分析方法[2,3].本文首先讨论了这两种方法,然后给出了一种基于线性时不变系统滤波的分数布朗运动功率谱的频域分析方法.

2 分数布朗运动功率谱的时频分析

定义 2　对于非平稳随机过程 $X(t)$,若其相关函数为 $R(t, s)$,则 $X(t)$ 的 Wigner-Ville谱为

$$W_x(t, k) = \int_{-\infty}^{+\infty}R_x\left(t+\frac{f}{2}, t-\frac{f}{2}\right)e^{-ikf}\mathrm{d}f, \tag{3}$$

可见 Wigner-Ville 谱是一种时间依赖的谱.将式 (2) 代入式 (3) 得分数布朗运动的 Wigner-Ville 谱为

$$W_{B_H}(t, k) = \int_{-\infty}^{+\infty}R_{B_H}(t+f/2, t-f/2)\cdot e^{-ikf}\mathrm{d}f = [1-2^{1-2H}\cos(2kt)](1/|k|^{2H+1}).$$

由于分数布朗运动的 Wigner-Ville 谱是一

收稿日期: 1995-09-14.
薛东辉,男,1966年生,博士研究生;武汉,华中理工大学电子与信息工程系 (430074).
* 国家自然科学基金资助项目 (69285001).

种时间依赖的谱,因此,对它的 Wigner-Ville 谱在时间域求平均,得

$$S_{B_H}(k,T) = \frac{1}{T}\int_0^T W_{B_H}(t,k)\,dt =$$

$$[1 - 2^{1-2H}\sin(2kT)/(2kT)](1/|k|^{2H+1}).$$

令 $T\to\infty$,并定义 $\lim\limits_{T\to\infty} S_{B_H}(k,T)$ 为分数布朗运动的功率谱,则有

$$S_{B_H}(k) = \lim_{T\to\infty} S_{B_H}(k,T) = 1/|k|^{2H+1},$$

因此,通过定义分数布朗运动的 Wigner-Ville 谱,并对分数布朗运动的 Wigner-Ville 谱在时间域取平均,从而导出了分数布朗运动具有式 (1) 形式的功率谱.

3 分数布朗运动功率谱的时间尺度分析

小波变换为时变信号的分析提供了一种强有力的工具.若 $j(x)\in L_2(R)$,满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} j(x)\,dx = 0$,则称 $j(x)$ 为小波函数.又设 $f\in L^2$,则信号 $f(t)$ 的连续小波变换 $W_f(a,b)$ 定义为

$$W_f(a,b) = |a|^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, j\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

$$(b\in R,\ a\in R-\{0\}),$$

式中 a 是尺度参数.下面讨论分数布朗运动小波变换的性质.

$$E[W_{B_H}(a,t)W_{B_H}(a,s)] = a^{-1}\cdot$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E[B_H(f_1)B_H(f_2)]\, j\left(\frac{t-f_1}{a}\right) j\left(\frac{s-f_2}{a}\right)\cdot$$

$$df_1 df_2 = -\frac{V_H a^{2H+1}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^{2H} V_j\left(f - \frac{t-s}{a}\right) df,$$

式中 $V_j(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} j(\theta)\, j(\theta - f)\, d\theta$.

由分数布朗运动小波变换的相关函数可知,当尺度 a 一定时,$E[W_{B_H}(a,t)W_{B_H}(a,s)]$只与 $t-s$ 有关,因此,分数布朗运动的小波变换是一个平稳随机过程.分数布朗运动小波变换的功率谱为

$$S_{B_H}(k,a) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{B_H}(f,a)\, e^{-ikf}\, df =$$

$$a|j(ak)|^2 (1/|k|^{2H+1}), \tag{4}$$

式 (4) 表示分数布朗运动经过尺度为 a 时的小波变换的谱.当取所有的尺度时,并考虑到不同尺度方向上小波变换的能量分布,可得分数布朗运动的功率谱

$$S_{B_H}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_B(k,a)\frac{da}{a^2} = \frac{1}{|k|^{2H+1}}. \tag{5}$$

因此,通过对分数布朗运动进行小波变换,同样导出了分数布朗运动具有式 (1) 形式的功率谱.

4 分数布朗运动功率谱的频域分析

分数布朗运动是一个非平稳随机过程,但经过某种变换可能转换成一个平稳过程.通过对变换后平稳过程的谱分析,可以得到非平稳分数布朗运动的谱信息.

定理 1 分数布朗运动通过一个带通的线性时不变系统 (系统通带下限 $k_L > 0$) 后,输出为一个具有统计自相似性的广义平稳随机过程.

证明 设一个带通的线性时不变系统的冲击响应为 $h(t)$,则分数布朗运动 $B_H(t)$ 通过该系统后的输出为

$$y_{B_H}(t) = B_H(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_H(t-f)h(f)\,df,$$

$$E[y_{B_H}(t)y_{B_H}(s)] =$$

$$\frac{V_H}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[|t-f_1|^{2H} + |s-f_2|^{2H} -$$

$$|t-s-f_1+f_2|^{2H}]h(f_1)h(f_2)\,df_1 df_2.$$

设 $H(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-ikt}dt$,由于通带下限 $k_L > 0$,故 $H(0) = 0$,即 $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = 0$,于是有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[|t-f_1|^{2H}]h(f_1)h(f_2)\,df_1 df_2 =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(f_2)\,df_2\int_{-\infty}^{+\infty}[|t-f_1|^{2H}]h(f_1)\,df_1 = 0;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[|s-f_2|^{2H}]h(f_1)h(f_2)\,df_1 df_2 =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(f_1)\,df_1\int_{-\infty}^{+\infty}[|s-f_2|^{2H}]h(f_2)\,df_2 = 0,$$

因此

$$E[y_{B_H}(t)y_{B_H}(s)] = -\frac{V_H}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|t-s-$$

$$f_1+f_2|^{2H}h(f_1)h(f_2)\,df_1 df_2.$$

由于相关函数 $E[y_{B_H}(t)y_{B_H}(s)]$ 只与 $t-s$ 有关,因此,分数布朗运动 $B_H(t)$ 通过一个带通的线性时不变系统后的输出为一个广义平稳随机过程.

由于 $y_{B_H}(t)$ 为一平稳随机过程,故

$$S_{y_{B_H}}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{B_H}(f)e^{-ikf}\,df =$$

$$-\frac{V_H}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f - f_1 +$$

$$f_2|^{2H}h(f_1)h(f_2)e^{-ikf}\,df\,df_1 df_2 =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(f_1)e^{-ikf_1}df_1\int_{-\infty}^{+\infty} h(f_2)e^{ikf_2}df_2\cdot$$

$$\left(-\frac{V_H}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|f|^{2H}e^{-ikf}df\right) =$$

谱.

$$|H(k)|^2/|k|^{2H+1},\qquad(6)$$

当 $H(k)$ 取为广义理想带通滤波器时,即

$$H(k)=\begin{cases}1 & (0<k_L<|k|),\\ 0 & (k=0)\end{cases}$$

时,有 $S_{y_{B_H}}(k)=1/|k|^{2H+1}$,由于 $H(k)$ 是广义理想带通滤波器,因此,在通带 $k_L>0$ 内,$B_H(t)$ 与 $y_{B_H}(t)$ 具有相同的谱分布和相同形式的功率谱,它们唯一的区别仅在于直流分量上.故分数布朗运动的功率谱在通带 $k_L>0$ 内为 $1/|k|^{2H+1}$.令 $k_L\to 0$,则得分数布朗运动的功率谱为 $1/|k|^{2H+1}$.因此,通过线性滤波的方法,由频域直接推导出了分数布朗运动的功率谱表示.需要指出的是,通过广义带通滤波的方法,滤除了分数布朗运动中不平稳的直流分量,从而由 $y_{B_H}(t)$ 的功率谱得到 $B_H(t)$ 的功率谱,这种处理方法的合理性还在于,从信息论的角度来看,直流分量的去除,并不损失信息量.

5 讨论

以上由分数布朗运动通过一线性时不变理想带通滤波器的输出推导出了分数布朗运动的功率谱.当系统冲激响应取

$$h(t)=a^{1/2}g(-t/a)\qquad(7)$$

并且满足 $G(0)=0$ 时 (其中 $G(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-ikt}dt$),则 $h(t)$ 可视为一带通滤波器.若同时满足 $\int_0^{+\infty}\frac{|G(k)|^2}{k}dk<\infty$,则输出

$$y(t)=B_H(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}B_H(s)g\left(\frac{s-t}{a}\right)ds$$

为分数布朗运动的小波变换.故由式 (6) 直接可得

$$S_y(k)=|H(k)|^2/|k|^{2H+1}=a|G(ak)|^2/|k|^{2H+1},$$

所得结果与式 (4) 相同.由于式 (7) 中的带通滤波器是依赖于参数 a 的,所以当 a 取所有大于零的值时,按照式 (5),即可得到分数布朗运动的功率谱.故分数布朗运动的小波变换分析从频域上看,只是系统冲激响应应取为 $h(t)=a^{1/2}g(-t/a)$ 的一种特殊带通滤波器情形.

因此,基于线性时不变系统滤波的方法,为非平稳分数布朗运动功率谱的分析建立了一种频域分析的一般方法,它更好地揭示了分数布朗运动的谱特性.

参　考　文　献

1 Mandbrot B B, Van Ness J W. Frational Brownian Motions. Fractional Noises and Applications, SIAM Rev, 1968, 10(4): 422～436

2 Flandrin P. On the Spectrum of Fractional Brownian Motion. IEEE Trans. Inform. Theory, 1989, 35(1): 197～199

3 Flandrin P. Wavelet Analysis and Synthesis of Fractional Brownian Motion. IEEE Trans. Inform. Theory, 1992, 38(3): 910～917

Spectrum Analysis for Fractional Brownian Motion

Xue Donghui　Zhu Yaoting　Zhu Guangxi　Xiong Yan

Abstract　The time-frequency analysis and time-scale domain analysis for the spectrum of fractional Brownian motion are discussed. With an analysis of the non-stationarity of fractional Brownian motion, the conclusion that the output of the non-stationary fractional Brownian motion through a band-pass filter will be a stationary stochastic process is proved. The frequency-domain analysis method for the spectrum of fractional Brownian motion based on linear time-invariant filtering is proposed and discussed.

Key words　fractional Brownian motion; fractal; spectrum analysis; time-frequency analysis; wavelet transform

Xue Donghui,　doctoral candidate; Dept. of Electronics and Information Eng., HUST, Wuhan 430074, China.